Petre Năchilă Cătălin-Eugen Năchilă Eugen Niță

Exerciții şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a III-a

Editura Nomina

CUPRINS

Capitolul 1

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ

Acest capitol este destinat îndeosebi copiilor şi părinţilor. Vor fi prezentate cele mai importante metode de rezolvare a problemelor de aritmetică.

Prezentarea metodei este însoţită de exemple de probleme rezolvate, dar şi de probleme propuse.

Toate metodele prezentate sunt folosite şi în capitolele următoare ale cărţii: teste de verificare a cunoştinţelor, teste grilă, teste pentru concursuri.

1.1. METODA GRAFICĂ (METODA FIGURATIVĂ)

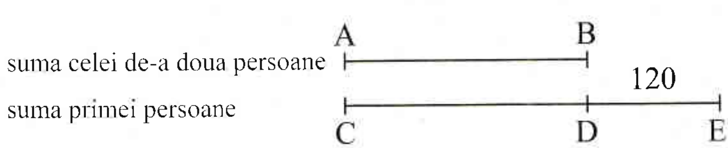
În aplicarea metodei grafice se poate apela la orice categorie de elemente grafice (segmente, cercuri, dreptunghiuri etc.). Folosirea unor anumite elemente grafice este impusă de natura datelor problemei, de accesibilitatea lor, dar mai ales de utilitatea acestora în rezolvarea problemelor.

1.1.a. DETERMINAREA (AFLAREA) NUMERELOR CUNOSCÂND SUMA ŞI DIFERENŢA LOR

1. Două persoane au împreuna 540 lei.

Să se afle ce suma are fiecare persoană, dacă prima persoană are mai mult decât a doua persoană cu 120 lei.

Soluţie: Reprezentăm cele două mărimi care intervin (sumele celor două persoane) prin două segmente, din care unul are lungimea mai mare (suma primei persoane este mai mare cu 120 lei):



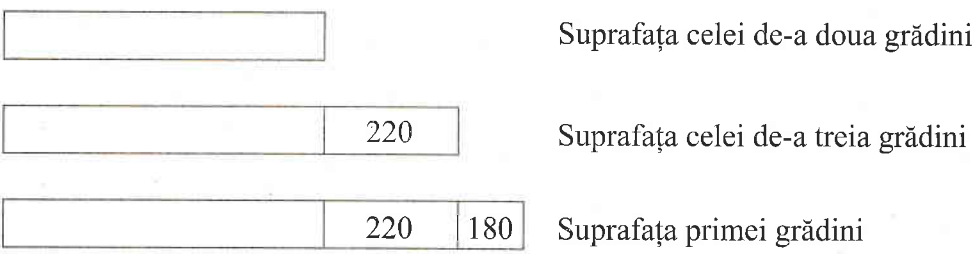
Diferenţa dintre lungimile segmentelor CE şi AB (adică segmentul DE) reprezintă diferenţa dintre cele două sume. Segmentul care reprezintă suma pe care o au împreună cele două persoane este format din două segmente de aceeaşi lungime (fiecare segment reprezintă suma celei de-a doua persoane) şi un segment ce reprezintă suma de 120 lei.

Suma celei de-a doua persoane este (540 – 120) : 2 = 210 (lei).
Suma primei persoane este 210 + 120 = 330 (lei) (sau 540 – 210 = 330).

2. Trei grădini au împreună o suprafață de 3320 m^2. A treia grădină este cu 220 m^2 mai mare decât a doua, iar prima grădină este cu 180 m^2 mai mare decât a treia.

Să se afle suprafața fiecărei grădini.

Soluție: Suprafețele celor trei grădini sunt reprezentate astfel:



Suprafața celei de-a doua grădini se determină astfel:
220 + (220 + 180) = 620; (3320 – 620) : 3 = 900 m^2.
A treia grădina are: 900 + 220 = 1120 m^2, iar prima grădină are:
1120 + 180 = 1300 m^2.

OBSERVAȚIE: Dacă se cunosc suma S şi diferența D a două numere a şi b, $a \geq b$, atunci avem $a = (S + D) : 2$, $b = (S - D) : 2$.

Într-adevăr, avem $a + b = S$, $a - b = D$, de unde prin adunare, respectiv scădere rezultă că $2 \times a = S + D$, $2 \times b = S - D$.

1.1.b. DETERMINAREA A DOUĂ NUMERE CÂND SE CUNOSC SUMA ŞI RAPORTUL LOR

Prin raportul a două numere naturale a şi b, b > 0, înțelegem a : b. Raportul numerelor a şi b (în această ordine) se notează cu $\frac{a}{b}$.

3. Suma a două numere este 224, iar unul din numere este de trei ori mai mare decât celălalt număr.

Să se determine cele două numere.

Soluție: Reprezentăm numerele astfel:

numărul mai mic

numărul mai mare

Suma celor două numere este dată de:

Numărul mai mic este: 224 : 4 = 56.

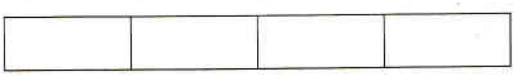
Numărul mai mare este: 56 × 3 = 168 (sau 224 – 56 = 168).

4. Un muncitor a săpat trei sferturi din cât a săpat alt muncitor, împreună au săpat 714 m.

Cât a săpat fiecare muncitor?

Soluție: Reprezentăm suprafețele săpate astfel:

suprafața săpată de primul muncitor



suprafața săpată de al doilea muncitor

Suprafața săpată de cei doi muncitori este suprafața a 4 + 3 = 7 dreptunghiuri egale.

Primul muncitor a săpat: 714 : 7 × 3 = 306 m^2.

Al doilea muncitor a săpat: 714 : 7 × 4 = 408 m^2 (sau 714 – 306 = 408 m^2).

OBSERVAȚIE

Dacă suma a două numere x și y este S, iar raportul lor este a : b, atunci cele două numere sunt date de $x = S : (a + b) \times a$ și $y = S : (a + b) \times b$. Într-adevăr, avem $S = x + y$ și $bx = ay$. Înmulțind prima relație cu b, avem $bS = bx + by = ay + by = (a + b) \times y$. Obținem $y = b \times S : (a + b)$. Analog, înmulțind prima relație cu a, avem succesiv $aS = ax + ay = ax + bx = (a + b) \times x$ și deci:

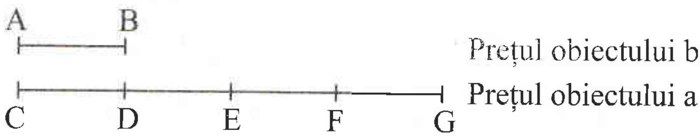
$$x = a \times S : (a + b).$$

1.1.c. DETERMINAREA A DOUĂ NUMERE CAND SE CUNOSC DIFERENȚA ȘI RAPORTUL LOR

5. Un obiect a este de 4 ori mai scump decât un obiect b. Obiectul a a costat cu 369 lei mai mult decât obiectul b.

Să se determine cât costă fiecare obiect.

Soluție: Reprezentăm prețurile celor două obiecte astfel:

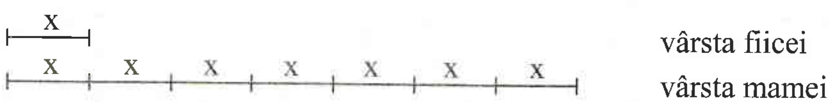


Prețul obiectului b este reprezentat prin segmentul AB, iar prețul obiectului a prin segmentul CG, care este format din patru segmente CD, DE, EF, FG care au aceeași lungime ca și segmentul AB. Diferența celor două prețuri este dată de segmentul DG, care are lungimea de trei ori mai mare decât segmentul AB. Obiectul b costă 369 : 3 = 123 lei, iar obiectul a costă 123 × 4 = 492 lei.

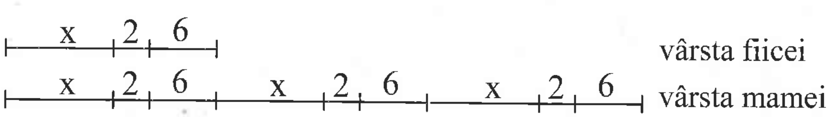
6. În urmă cu 2 ani, vârsta mamei era de 7 ori vârsta fiicei. Peste 6 ani, vârsta mamei va fi de trei ori vârsta fiicei.

Să se determine ce vârstă are fiecare.

Soluție: Vârstele fiicei și mamei în urmă cu doi ani sunt reprezentate astfel:



Peste 6 ani vârstele fiicei și mamei sunt reprezentate astfel:



Comparăm vârsta mamei de acum doi ani cu cea a mamei de peste 6 ani. Diferența acestor vârste este de 8 ani. Cu ajutorul „segmentelor" avem:

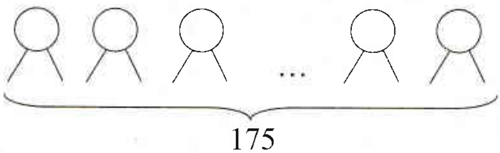
$7x + 2 + 6 = 3 \times (x + 2 + 6)$, de unde $7x - 3x = 24 - 8$, adică $x = 4$.

Fiica are 6 ani, iar mama are $7 \times 4 + 2 = 30$ ani.

7. Într-o fermă sunt crescute găini şi oi. Numărul picioarelor este 450, iar numărul capetelor este 175.

Câte găini şi câte oi sunt în fermă?

Soluție: Fiecare vietate are 2 picioare sau 4 picioare. Figurăm fiecare vietate cu două picioare cu ajutorul unui cerc şi cu două segmente oblice:



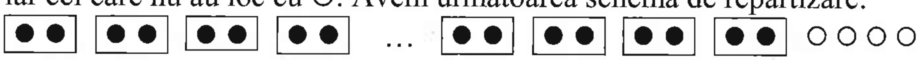
apar $175 \times 2 = 350$ picioare

Rămân $450 - 350 = 100$ picioare, care reprezintă diferența de $4 - 2 = 2$ picioare pentru fiecare oaie. Numărul oilor este $100 : 2 = 50$, iar numărul găinilor $175 - 50 = 125$.

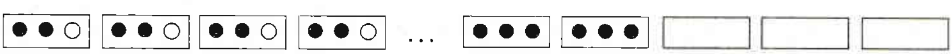
8. Dacă se aşază câte doi elevi într-o bancă, rămân 4 elevi. Dacă se aşază câte 3 elevi în bancă rămân 3 bănci libere.

Câți elevi şi câte bănci sunt?

Soluție: Reprezentăm grafic elevii care au loc în bănci în ambele variante cu ●, iar cei care nu au loc cu ○. Avem următoarea schemă de repartizare:



Completăm băncile de la doi elevi la trei elevi, luând cei patru elevi rămaşi, dar şi cu elevii în număr de 3×2 din băncile rămase libere. Avem următoarea repartizare:

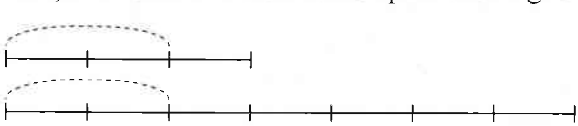


Avem $4 + 3 \times 2 + 3 = 13$ bănci şi $13 \times 2 + 4 = 30$ elevi.

9. Doi elevi au împreună suma de 120 lei.

Să se determine ce sumă are fiecare elev, dacă două treimi din suma unuia reprezintă două şeptimi din suma celuilalt.

Soluție: Folosim următoarea reprezentare grafică:



Suma pentru primul elev

Suma pentru al doilea elev

În total avem $3 + 7$ segmente egale (congruente). Fiecare segment reprezintă 120 lei $: 10 = 12$ lei.

Primul elev are $12 \times 3 = 36$ lei, iar al doilea elev are $12 \times 7 = 84$ lei.

Probleme propuse

1. Într-o livadă sunt 207 meri, peri şi pruni. Numărul merilor este cu 24 mai mic decât al prunilor, dar cu 39 mai mare decât al perilor.

Câți meri, peri, respectiv pruni sunt în livadă?

2. În trei depozite erau în total 200 de tone de zahăr. Din fiecare depozit s-a vândut aceeaşi cantitate de zahăr şi au rămas 25 de tone în primul depozit, 36 de tone în al doilea depozit şi 43 de tone în al treilea depozit.

Ce cantitate de zahăr a fost în fiecare depozit?

3. Trei grădini au împreună suprafața de 92 ha. Suprafața primelor două grădini este de 55 ha, iar a ultimelor două grădini de 63 ha.

Ce suprafață are fiecare grădină?

4. În două biblioteci sunt 440 de cărți. Într-o bibliotecă sunt cu 14 cărți mai mult decât dublul numărului de cărți din cealaltă bibliotecă.

Câte cărți sunt în fiecare bibliotecă?

5. Trei persoane au împreună suma de 720 lei. A doua persoană are de două ori mai mult decât prima persoană şi încă 50 lei. A treia persoană are de 3 ori mai mult decât primele două la un loc şi încă 40 lei.

Ce sumă are fiecare persoană?

6. Suma a trei numere este 288. Jumătate din primul număr este cât o treime din al doilea număr, respectiv cât un sfert din al treilea număr.

Să se afle numerele.

7. Bunica, mama şi fiica au împreună 87 ani. Peste 3 ani, mama va fi de 5 ori mai în vârstă decât fiica, iar bunica de două ori mai în vârstă decât mama.

Ce vârstă are fiecare?

8. Un turist a parcurs o distanță de 108 km pe jos şi cu maşina. Distanța parcursă pe jos reprezintă două şeptimi din distanța parcursă cu maşina.

Ce distanță a parcurs pe jos şi ce distantă a parcurs cu maşina?

9. Într-o cutie sunt de trei ori mai multe bile albe decât negre. Patru elevi iau câte o bilă albă şi câte o bilă neagră. Rămân în cutie de 4 ori mai multe bile albe decât bile negre.

Câte bile albe şi câte bile negre au fost inițial în cutie?

10. Un călător a parcurs un drum în trei zile astfel: în prima zi o treime din distanță, a doua zi un sfert din restul distanței rămase, iar în a treia zi cu 36 km mai mult decât în prima zi.

Să se determine ce distanță a parcurs în fiecare zi.

11. Un grup de fete și băieți se așază pe un rând astfel încât oricare 3 fete se află între grupe de câte doi băieți. Numărul total de copii este 147.

Să se determine numărul băieților și numărul fetelor.

1.2. METODA COMPARAȚIEI

În problemele care se rezolvă prin metoda comparației intervin două sau mai multe mărimi variabile care iau diverse valori. Aceste mărimi sunt legate între ele prin relații (liniare) bine precizate.

Dacă valorile aceleiași mărimi sunt egale (din enunțul problemei), se reduc aceste mărimi (nu mai apar într-o nouă relație), prin scăderea relațiilor respective.

Dacă mărimile nu au valori egale din enunțul problemei, apare necesitatea aducerii la același termen de comparație. Acest lucru se realizează prin înmulțirea relațiilor date cu numere convenabil alese.

1.2.1. ELIMINAREA UNEI MĂRIMI PRIN REDUCERE

10. Un caiet, un pix și un stilou costă împreună 16 lei. Un caiet, trei pixuri și un stilou costă împreună 24 lei. Un caiet, un pix și 4 stilouri costă împreună 46 lei.

Să se afle cât costă un caiet, cât costă un pix și cât costă un stilou.

Soluție:

1 caiet................ 1 pix.................. 1 stilou...............16 lei (1)
1 caiet................3 pixuri .... 1 stilou...............24 lei (2)
1 caiet................ 1 pix.................. 4 stilouri ....46 lei (3)

Scăzând prima relație din a doua relație rezultă că 3 – 1 = 2 pixuri costă 24 – 16 = 8 lei. Un pix costă 4 lei.

Scăzând prima relație din a treia relație rezultă că 4 – 1 = 3 stilouri costă 46 – 16 = 30 lei. Un stilou costă 10 lei.

Un caiet costă 16 – 4 – 10 = 2 lei.

11. Un caiet, 2 pixuri și 3 stilouri costă împreună 40 lei. Trei caiete, un pix și 2 stilouri costă împreună 30 lei. Două caiete, 3 pixuri și un stilou costă împreună 26 lei.

Să se afle cât costă un caiet, cât costă un pix și cât costă un stilou.

Soluție:

1 caiet................2 pixuri............. 3 stilouri ....40 lei (1)

3 caiete.............. 1 pix.................. 2 stilouri ....30 lei (2)

2 caiete..............3 pixuri .... 1 stilou...............26 lei (3)

Adunând cele trei relații rezultă că 6 caiete, 6 pixuri și 6 caiete costă împreună 96 lei. Rezultă relația:

1 caiet................ 1 pix.................. 1 stilou...............16 lei (4)

Scăzând relația (1) din relația (4), rezultă relația:

1 pix..................2 stilouri............ 24 lei (5)

Scăzând din relația (2) relația (5), rezultă că 3 caiete costă 30 – 24 = 6 lei. Un caiet costă 6 : 3 = 2 lei. Atunci avem:

1 pix.................. 1 stilou.............. 16 – 2 = 14 lei (6)

1 pix..................2stilouri............. 24 lei (5)

Scăzând relația (5) din relația (6) rezultă că un stilou costă 24 – 14 = 10 lei. Rezultă că un pix costă 14 – 10 = 4 lei.

1.2.2. ELIMINAREA UNEI NECUNOSCUTE PRIN ADUCEREA LA ACELAȘI TERMEN DE COMPARAȚIE

12. 7 m de pânză și 12 m de stofa costă împreună 261 lei. 5 m de pânză și 8 m de stofă costă împreună 175 lei.

Cât costă un metru de pânză și cât costă un metru de stofă?

Soluție: Relațiile din enunț sunt:

7 m pânză..................12 m stofă.....................261 lei (1)

5 m pânză....................8 m stofă......................175 lei (2)

Varianta 1: Vom elimina mărimea privind cantitățile de pânză, înmulțind relația (1) cu 5 și relația (2) cu 7 avem următoarele două relații:

35 m pânză.............60 m stofă ....1305 lei

35 m pânză.............56 m stofă ....1225 lei

Scăzând ultimele două relații, rezultă că 60 – 56 = 4 m stofă costă 1305 – 1225 = 80 lei. Deci un metru de stofă costă 20 lei. Atunci un metru de pânză costă (175 – 8 × 20) : 5 = 3 lei (sau (261 – 12 × 20) : 7 = 3 lei).

Varianta 2: Vom elimina mărimea privind cantitățile de stofă. Deoarece 12 × 2 = 24 și 8 × 3 = 24 (nu vom lua 12 × 8 și 8 × 12 pentru a nu lucra cu numere mult mai mari), înmulțim relația (1) cu 2 și relația (2) cu 3 și apoi scădem relațiile obținute. Obținem relațiile:

14 m pânză.............24 m stofă ....522 lei

15 m pânză.............24 m stofă ....525 lei

1 m pânză...3 lei

Deci 1 m de pânză costă 3 lei și apoi un metru de stofă costă

(175 – 5 × 3) : 8 = 20 lei.

13. Doi saci cu mere, 3 saci cu cartofi şi 4 saci cu zahăr cântăresc 370 kg. Trei saci cu mere, 4 saci cu cartofi şi 5 saci cu zahăr cântăresc 485 kg. Patru saci cu mere, 6 saci cu cartofi şi 7 saci cu zahăr cântăresc 690 kg.

Să se afle cât cântăreşte un sac cu mere, un sac cu cartofi, respectiv un sac cu zahăr.

Soluţie: Avem următoarele relaţii:

(1) 2 saci (mere)......	3 saci (cartofi).........	4 saci (zahăr)	370 kg	3	
(2) 3 saci (mere)......	4 saci (cartofi).........	5 saci (zahăr)	485 kg	2	4
(3) 4 saci (mere)......	6 saci (cartofi).........	7 saci (zahăr)	690 kg		3

Avem următoarele triplete de numere (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 6, 7), ce privesc numărul de saci cu mere, cartofi, respectiv zahăr. Numerele care permit o eliminare „mai uşoară” (se lucrează cu numere mai mici) se referă la primul triplet. Vom elimina de două ori aceeaşi mărime (numărul de saci cu mere) astfel: înmulţim prima relaţie cu 3, a doua relaţie cu 2 şi le scădem, apoi înmulţim a doua relaţie cu 4, a treia relaţie cu 3 şi le scădem. Obţinem relaţiile:

6 saci (mere) .... 9 saci (cartofi) ...... 12 saci (zahăr) ...... 1110 kg
6 saci (mere) .... 8 saci (cartofi) ...... 10 saci (zahăr) ...... 970 kg
1 sac (cartofi) .... 2 saci (zahăr) .... 140 kg (4)

12 saci (mere) ...... 16 saci (cartofi) .... 20 saci (zahăr) ...... 1940 kg
12 saci (mere) ...... 18 saci (cartofi) .... 21 saci (zahăr) ...... 2070 kg
2 saci (cartofi) ...... 1 sac (zahăr).......... 130 kg (5)

Adunăm relaţiile (4) şi (5) şi rezultă că 3 saci cu cartofi şi 3 saci cu zahăr cântăresc 270 kg, de unde rezultă că un sac de cartofi şi un sac de zahăr cântăresc 270 : 3 = 90 kg.

Un sac de cartofi cântăreşte 130 – 90 = 40 kg, iar un sac cu zahăr cântăreşte 90 – 40 = 50 kg. Un sac cu mere cântăreşte:

(370 – 3 × 40 – 4 × 50) : 2 = 25 kg.

1.2.3. ELIMINAREA UNEI NECUNOSCUTE (MĂRIMI) PRIN ÎNLOCUIREA EI

Se înlocuieşte o mărime (sau mai multe mărimi) permiţându-se astfel re formularea problemei (se ajunge la o problemă cu mai puţine mărimi).

Se poate încerca şi o clasificare a problemelor de acest tip în următoarele categorii:

I) Probleme la care corespund operaţiile de adunare şi scădere. În aceste probleme apar următoarele formulări: „mai mare” (mai mult cu, mai scump, mai lung, ...) şi „mai mic” (mai puţin cu, mai ieftin, mai scurt, ...).

II) Probleme la care corespund operațiile de înmulțire și împărțire. În aceste probleme apar următoarele formulări: „mai mare” (scump, lung, ...) de ... ori; „mai mic” (ieftin, scurt, ...) de ... ori.

III) Probleme în care „se echivalează” anumite valori ale necunoscutelor (a unități din mărimea A au aceeași valoare cu b unități din mărimea B).

14. Pentru 6 caiete și 11 cărți s-au plătit 144 lei. O carte costă mai mult cu 10 lei decât un caiet.

Să se afle cât costă o carte și cât costă un caiet.

Soluție: Dacă o carte costă cu 10 lei mai mult decât un caiet, atunci 11 cărți vor costa cât 11 caiete și încă $11 \times 10 = 110$ lei. Atunci $6 + 11 = 17$ caiete vor costa $144 - 110 = 34$ lei. Un caiet costă $34 : 17 = 2$ lei. O carte costă $2 + 10 = 12$ lei.

15. Trei obiecte de tip A, 5 obiecte de tip B și 7 obiecte de tip C costă împreună 105 lei. Un obiect de tip B costă cu 2 lei mai mult decât un obiect de tip A, iar un obiect de tip B costă cu 3 lei mai puțin decât un obiect de tip C.

Cât costă un obiect din fiecare tip?

Soluție: Un obiect de tip C costă cu $2 + 3 = 5$ lei mai mult decât un obiect de tip A. Rezultă că $3 + 5 + 7 = 15$ obiecte de tip A la care adăugăm $5 \times 2 + 7 \times 5 = 45$ lei costă 105 lei. Un obiect de tip A costă $(105 - 45) : 15 = 4$ lei. Un obiect de tip B costă $4 + 2 = 6$ lei, iar un obiect de tip C costă $4 + 5 = 9$ lei.

16. Două cravate, 5 cămăși și 7 costume costă împreună 1560 lei. O cămașă costă cu 25 lei mai mult decât o cravată, iar un costum costă de 4 ori mai mult decât o cămașă.

Să se afle cât costă o cravată, cât costă o cămașă și cât costă un costum.

Soluție: 5 cămăși costă cu $5 \times 25 = 125$ lei mai mult decât 5 cravate. Un costum costă cu $4 \times 25 = 100$ lei mai mult decât 4 cravate. Atunci $2 + 5 + 7 \times 4 = 35$ cravate costă cu $125 + 7 \times 100 = 825$ lei mai puțin decât 1560 lei. O cravată costă $(1560 - 825) : 35 = 21$ lei. O cămașă costă $21 + 25 = 46$ lei, iar un costum costă $46 \times 4 = 184$ lei.

17. Două obiecte de tip A, 5 obiecte de tip B și 6 obiecte de tip C costă împreună 250 lei. Un obiect de tip B costă cu 2 lei mai mult decât două obiecte de tip A, iar un obiect de tip C costă cât 3 obiecte de tip A și două obiecte de tip B.

Să se afle cât costă câte un obiect din fiecare tip.

Soluție: 5 obiecte de tip B costă cu $5 \times 2 = 10$ lei mai mult decât $5 \times 2 = 10$ obiecte de tip A. 6 obiecte de tip C costă cu $6 \times 2 \times 2 = 24$ lei mai mult decât $6 \times (3 + 2 \times 2) = 42$ obiecte de tip A. Atunci $2 + 10 + 42 = 54$ obiecte de tip A